



Lantmäteriet
Lantmäteriverket - National Land Survey
S - 801 12 GÄVLE · SWEDEN

Tekniska skrifter - Professional Papers

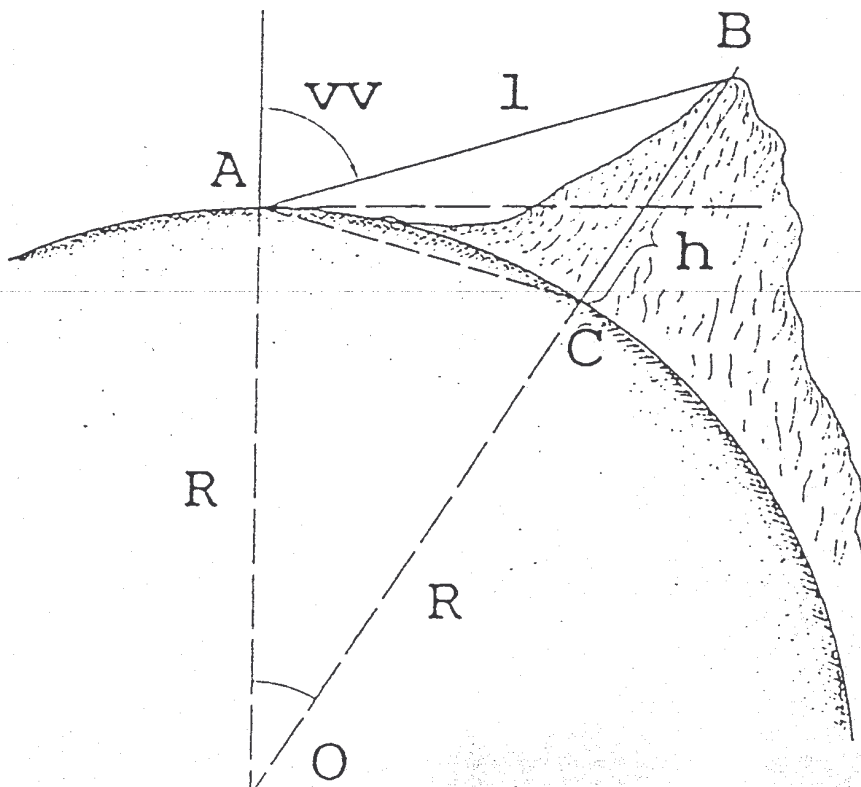
LMV-RAPPORT 1987:11

ISSN 0280-5731

EN STUDIE AV VIKTSFUNKTIONEN VID TRIGONOMETRISK HÖJDMÄTNING I SAMBAND MED FRI UPPSTÄLLNING

examensarbete av

Martin Lidberg och Runar Svensson, KTH



Gävle 1987



Förteckning över utgivna LMV-rapporter 1987

Rapport	Titel	Upphovsman
1987:1	Utvärdering av regional produktion av ekonomisk karta	Ulf Andersson
1987:2	Intrång i fyndigheter och täkter	Leif Norell
1987:3	Översyn av LMVs lokaler	Bertil Ragne Lennart Karlström
1987:4	Kartproduktion i Karlskrona	Gunnar Sundstrand
1987:5	Geografiska Sverigedata	H-F Wennström
1987:6	Längdmätning mot plastreflektorer, tillämpad vid upprättande och utnyttjande av mindre primärnät	Anders Nordquist Anders Olsson
1987:7	Kartplan 1987	H-F Wennström
1987:8	A Programme for National Geographic Data Bases in Sweden	Lars Ottoson
1987:9	Precision och tillförlitlighet vid fri uppställning - en simuleringsstudie	Runar Svensson
1987:10	Tvåårigt ortofotoomdrev	Lars Lindgren

Titel

EN STUDIE AV VIKTSFUNKTIONEN VID TRIGONOMETRISK
HÖJDMÄTNING I SAMBAND MED FRI UPPSTÄLLNING

av Martin Lidberg och Runar Svensson

Huvudinnehåll

Detta examensarbete innefattar en teoretisk analys av felfortplantningen vid enkel trigonometrisk höjdmätning. En modell för viktsfunktionen har härletts och genom analys av varianskomponenter i en empirisk undersökning har parametrar i denna funktion skattats. Den framtagna funktionen är ämnad för viktsättning vid utjämning av trigonometriskt mätta höjder i samband med fri uppställning.

Nedanstående personer har fungerat som handledare för arbetet.

Clas-Göran Persson
Utvecklingsrådet för
landskapsinformation
(tidigare LMV, Gävle)

Torbjörn Cederholm
Geodetiska Institutionen
KTH, Stockholm

LDOK

Kg Mätningsteknik

Beställs hos

Lantmäteriverket
Blankettförrådet
801 12 GÄVLE

Liber Förlag



FÖRORD

Denna rapport utgör en del av författarnas examensarbete. Handedare i arbetet har varit: Clas-Göran Persson, Utvecklingsrådet för landskapsinformation (tidigare LMV) och Torbjörn Cederholm, KTH, vilka vi är skyldiga ett stort tack. Vidare tackar vi Georges Agostini och Lars E Engberg, KTH, för goda råd och synpunkter samt Vera Fa, LMV, för rithjälp.

Martin Lidberg

Runar Svensson

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

1	SAMMANFATTNING	sid. 1
2	BAKGRUND	2
3	FÖRSÖKETS UTFÖRANDE	4
4	STATISTISK ANALYS AV MÄTDATA	7
4.1	Försöksmodeller	7
4.2	Eliminering av grova fel	7
4.3	Analys av varianskomponenter	11
5	TEORETISK-EMPIRISK VIKTSFUNKTION	12
5.1	Teoretisk härledning	12
5.2	Empiriska resultat	16
5.2.1	Bestämning av K1	16
5.2.2	Bestämning av K2	17
5.2.3	Bestämning av K3	17
5.3	Slutgiltig viktsfunktion	18
5.3.1	Medelfel i instrument- och signalhöjder	18
5.3.2	Medelfel i utgångspunkter	18
5.3.3	Totalt apriorimedelfel	19
5.3.4	Summering	20
6	LITTERATURFÖRTECKNING	21
7	BILAGOR	23

1 SAMMANFATTNING

Denna studie syftar till att ta fram en viktsfunktion för beräkning av en "fritt uppställd" stations höjd ur trigonometriskt mätta höjdskillnader. Det är alltså inte den absoluta noggrannheten som i första hand är intressant, utan viktsrelationerna mellan höjdskillnadsbestämningar med olika siktlängder.

I den totala viktsfunktionen ingår inverkan från mätfel, fel på grund av refraktionens inverkan, fel i uppmätta signal- och instrumenthöjder samt fel i utgångspunkterna. Mätnoggrannheten och refraktionens inverkan har studerats empiriskt, noggrannheten i utgångspunkterna har beräknats ur felgränser i TFA, medan instrument- och signalhöjdsfelen har uppskattats erfarenhetsmässigt.

Viktsfunktionen visar sig kunna uttryckas på formen:

$$P_i = 1/(K_1 + K_2 * l^2 + K_3 * l^4),$$

där P_i betecknar vikt, K_1 - K_3 är viktsparametrar och l är siktlängderna i 100-tal meter.

Viktsparametrar har bestämts separat för olika typer av utgångspunkter: avvägda fixpunkter, trigonometriskt bestämda väggpunkter samt traditionella polygonpunkter. Dessutom har en genomsnittsformel tagits fram, som är användbar i de fall en uppdelning på olika punkttyper är opraktisk.

De framtagna viktsfunktionerna är endast tillämpbara för "normala" vertikalvinklar; de extrema förhållanden som uppkommer vid exempelvis specialmätning, industrimätning och vissa typer av byggmätning (mycket branta sikter och extremt korta avstånd) har dock hanterats på en teoretisk basis och formlerna kan kompletteras så att hänsyn tas även till sådana konfigurationer.

Erfarenheterna från studien är i första hand tänkta att tillämpas i Lantmäteriets fältdatorutveckling - dels för viktsättning vid beräkning, dels för att kunna bedöma hur långa siktlängder man kan använda vid trigonometrisk höjdmätning.

2 BAKGRUND

Inom den moderna samhällsmätningen pågår en snabb utveckling av utrustning och, som en följd därav, även mätmetoder. Konstruktionen av EDM-instrument har varit en revolutionerande del av denna utveckling, som lett fram till dagens totalstationer. Med dessa kan man mäta längder, horisontalvinklar och vertikalvinklar i en och samma uppställning - således även höjdskillnader.

Totalstationer använda i väggmarkerade stomnät är en rationell kombination av utrustning och mätmetodik som nu börjar komma i drift (Hellman, Källström, Oldenmark, Persson, Virking, 1985). Väggmarkerade stomnät har många fördelar jämfört med traditionella polygonnät (Gustafsson, Johansson, 1986), varav några kan nämnas:

-Fri uppställning kan användas både vid nätets framställning och utnyttjande. Den för mätning lämpligaste uppställningsplatsen kan väljas med hänsyn tagen till trafik, tillfälliga sikthinder etc.

-Det behövs ingen centrering av instrumentet över polygonpunkter, vilket medför att centreringsfelen reduceras.

Traditionell stommätning i höjd sker till stor del genom avvägning. Mätförfarandet skulle rationaliseras ytterligare om man använde sig av trigonometrisk höjdbestämning, med hjälp av mätt vertikalvinkel och längd. Detta förfarande skulle medföra att endast en instrumentuppställning behövs för total bestämning av en nypunkt - i både plan och höjd.

Vidare har utvecklingen av beräkningshjälpmedel medfört att det nu finns kraftfulla fältdatorer på marknaden. Dessa kan förses med programvara som utför strikt utjämnings av mätdata enligt minsta-kvadratmetoden (MK-metoden) och kan med fördel användas i kombination med totalstationer.

För att en MK-utjämnings av observationerna ska bli framgångsrik måste dessa emellertid vara viktade mot varandra på ett riktigt sätt. Vikten sätts oftast omvänt proportionellt mot kvadraten på ett uppskattat apriorimedelfel för respektive mätning. För plandelen (horisontalvinkel-längd) har man erfarenhetsmässigt kommit fram till funktioner för beräkning av apriorimedelfel eller vikt.

Exempel på sådana är vid avståndsmätning:

5 mm + 3 ppm

och vid vinkelmätning:

$\frac{15^{\text{cc}}}{n^{1/2}}$, där n motsvarar antalet mätta helsatser.

Motsvarande funktion vid trigonometrisk höjdbestämning är svårare att bestämma. En av orsakerna till detta är bland annat vertikalvinkelmätningens känslighet för atmosfärens inverkan på ljusets brytning - refraktion.

I samband med ett "fältdatorprojekt" vid LMV i Gävle undersöks nu huruvida man kan utvidga ett utjämningsprogram (FRI3, se Lithén, 1986) för fri uppställning, till att även omfatta utjämnning av trigonometriska höjdmätningar; viktsättningen har därvid vållat vissa problem.

Efter kontakter med LMV rörande lämpliga examensarbeten, enades vi därför om att en empirisk undersökning för bestämning av viktsfunktionen vid trigonometrisk höjdmätning vore ett intressant studieobjekt. Följdaktligen upprättades en bas i anslutning till KTH i Stockholm, där mätningar utförts mot objekt utplacerade på varierande avstånd från en utgångspunkt.

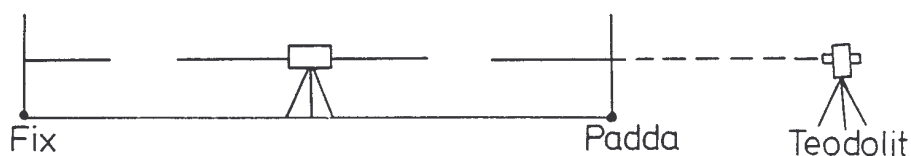
3 FÖRSÖKETS UTFÖRANDE

Försöksbasen består av åtta mätobjekt. Dessa är placerade inom intervallet 20-900m från stationspunkten. Objekten ligger inom en sektor på ca 50 gon i västlig riktning i förhållande till stationspunkten, vilket har medfört att mätningarna till stor del skett i medljus. Se skiss i bilaga 4.

Vertikalvinkelmätningarna har utförts med sekundteodoliterna KERN DKM2-A och WILD T2. Båda instrumenten är försedda med automatisk kompensation för vertikalaxelns avvikelse från lodlinjen. En helsatsmätning har betraktats som en vinkelobservation.

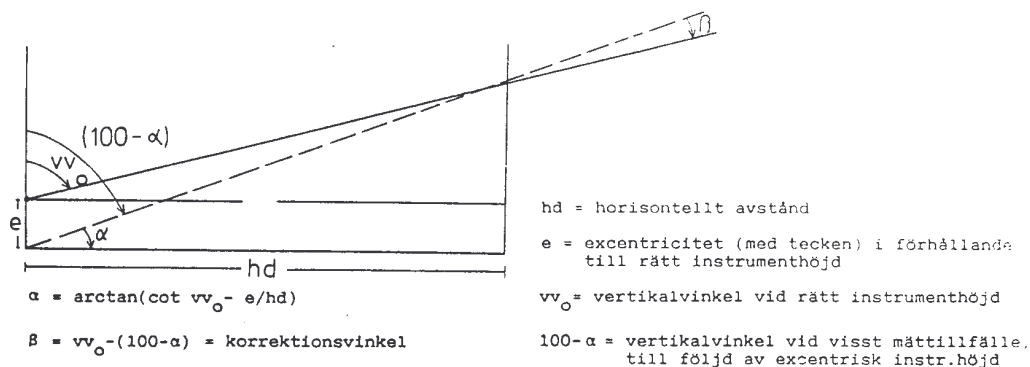
Eftersom vertikalvinkelmätningen är beroende av instrumenthöjden, har vi vid varje ny uppställning höjdbestämt instrumentet i förhållande till en höjdfix, dubb i berg, belägen ca 50m sydost om uppställningsplatsen (bilaga 3). Höjdbestämmningen har utförts före och efter varje mätserie. I detta moment har använts ett avvägningsinstrument, MOM-Ni-B6, och en vanlig Hultafors mätstång.

Tillvägagångssättet har varit att avväga höjdskillnaden mellan fixen och en padda, placerad ca 5m från stationspunkten. Därefter har höjden i förhållande till paddan avlästs med vinkelmätningssinstrument i båda cirkellägena (Fig 3.1).



Figur 3.1. Höjdbestämmning av instrument

Vi har strävat efter att konsekvent använda ungefär samma instrumenthöjd, och som utgångspunkt för korrektionsberäkningar har höjden vid ett visst tillfälle valts. På grundval av andra mättillfällens excentricitet i förhållande till denna höjd har korrektioner beräknats och lagts till mätvärdena i fråga (Figur 3.2):



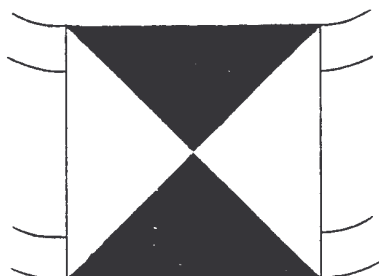
Figur 3.2. Korrektionsberäkningar

För att kunna beräkna dessa korrektioner måste horisontellt avstånd till objektet vara känt. Således mättes vid ett tillfälle både längder och vertikalvinklar mot de åtta objekten.

Vid längdmätningarna användes en Sokkhisha RED1A i kombination med WILD T2 och ett AGA utsättningsprisma. Atmosfärsförhållandena krävde inga korrektioner på längderna, däremot ställdes utsättningsprismat dikt an mot signalerna, vilket ger en korrektion för stakkäppen på +0.018m.

Ett av de åtta objekten är ej av samma signaltyp som de övriga (se bilaga 2). Detta på grund av att vi även ville ha ett objekt med låg zenitdistans (ca 91 gon). Därför valdes ett väldefinierat objekt på ett kraftledningsfundament ut som objekt nr 4 - på ett avstånd av ca 240m från stationspunkten. För att kunna mäta horisontellt avstånd till detta användes två teodoliter till att loda ned objektet till marknivå, varpå mätningarna utfördes.

De övriga signalerna utgjordes av 10*10cm signalskivor i plåt som applicerats på grova lyktstolpar, med en omkrets av ca 50 cm (Fig 3.3). Dessa signaler sattes fast med spännband av plåt och skruvklämmor på en höjd av ca 2m över mark.

Figur 3.3. Signaltyp, 10*10 cm²

Mot varje objekt mättes vertikalvinklar i tre, sex eller nio helsatser per uppställning. Därutöver användes två olika instrument och två olika observatörer. Således får man $3*2*2=12$ kombinationer av antal helsatser, mätinstrument och observatörer.

Under varje mätdag utfördes två av dessa kombinationer, vilket innebär två uppställningar per dag. Detta så att summan av observationerna mot varje enskilt objekt blev tolv. Alltså består ett stickprov mot ett objekt av tolv observationer och antalet stickprov på varje objekt är sex. Ett stickprov motsvarar då en mätdag.

Totala antalet observationer blir $8 \text{ objekt} * 6 \text{ stickprov} * 12 \text{ observationer} = 576$.

4 STATISTISK ANALYS AV MÄTDATA

4.1 FÖRSÖKSMODELLER

Till en början utgick vi från hypotesen att alla observationer mot samma objekt hade ett och samma väntevärde, dvs att även alla stickprovs väntevärden mot ett objekt var detsamma. Således modellen:

$$Y_{ij} = \mu + \epsilon_{ij}$$

Denna hypotes testades med 95% konfidensgrad (Enger, 1981) på alla objekt och kunde förkastas i samtliga fall, vilket också var väntat. Följdaktligen ansattes en ny modell, som är bättre anpassad till mätdata och den fysikaliska verkligheten:

$$Y_{ij} = \mu + \delta_i + \epsilon_{ij}$$

där δ är en faktor som tillkommer på grund av refractionen och som antas variera slumpmässigt mellan olika mättillfällen.

4.2 ELIMINERING AV GROVA FEL

För att en tillförlitlig analys av mätdata ska kunna utföras måste först grova fel elimineras inom varje stickprov. En metod för detta har utvecklats av Baarda/Pope (Baarda, 1968, Pope, 1976). Denna metod kan beskrivas med matrisalgebra. Den bygger på följande modell - ett system av så kallade observationsekvationer:

$$(4.1) \quad AX = L - \epsilon$$

där

A=Designmatris. I detta fall en kolonnmatris med dim 12*1, innehållande ettor

X=Det obekanta (sanna) värdet på vertikalvinkeln, dim 1*1

L=De utförda vinkelobservationerna, dim 12*1

ϵ =De obekanta (sanna) felen i mätningarna, dim 12*1

MK-lösningen av ett överbestämt system kan skrivas:

$$(4.2) \quad \bar{X} = (A^T P A)^{-1} A^T P L$$

där

\bar{X} =Skattningen av den obekanta sanna vinkeln

P =Viktsmatris; diagonalmatris med ettor

Efter utjämning enligt MK-metoden har man:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} A\bar{X} &= L+V \quad \text{eller} \\ V &= A\bar{X}-L \end{aligned}$$

Insättes (4.2) i (4.3) fås:

$$(4.4) \quad V = A(A^T P A)^{-1} A^T P L - L = (A^\circ - I)L = -(I - A^\circ)L$$

där V representerar skattade förbättringar till mätningarna.

(4.1) ger $L = AX + \epsilon$, vilket insättes i (4.4):

$$V = -(I - A^\circ)(AX + \epsilon)$$

som efter utveckling ger:

$$(4.5) \quad V = -(I - A^\circ)\epsilon$$

Vidare fås förbättringarnas kovariansmatris ur:

$$E\{VV^T\}, \text{ där } E\{\} \text{ är väntevärdesoperatoren.}$$

Alltså:

$$\begin{aligned} E\{VV^T\} &= Q_{VV} = E\{(I - A^\circ)\epsilon\epsilon^T(I - A^\circ)^T\} = \\ &= (I - A^\circ)E\{\epsilon\epsilon^T\}(I - A^\circ)^T \end{aligned}$$

där

$$E\{\epsilon\epsilon^T\} = Q_{\epsilon\epsilon} = \sigma_O^2 P^{-1} = \text{mätfelets kovariansmatris}$$

och där, i sin tur:

$$\sigma_O^2 = \text{grundmedelfel i kvadrat (varians)}$$

$$P = \text{mätningarnas viktsmatris}$$

Således har vi:

$$(4.6) \quad Q_{VV} = (I - A^\circ)\sigma_O^2 P^{-1}(I - A^\circ)^T = \sigma_O^2 (I - A^\circ)P^{-1}$$

Eftersom man antar att mätfelet är normalfördelade med väntevärdet 0, kan man visa att även förbättringarna har samma väntevärde:

$$E\{V\} = E\{-(I - A^\circ)\epsilon\} = -(I - A^\circ)E\{\epsilon\} = 0$$

Ur diagonalelementen i Q_{VV} (4.6) fås variansen för förbättring nr i:

$$\sigma_{v_i}^2 = \sigma_o^2 \frac{(I-A^\circ)_{ii}}{P_{ii}}$$

där $(I-A^\circ)_{ii}$ motsvarar den relativa redundansen för mätningen i fråga.

Alltså:

$$V_i : N(0, \frac{\sigma_o (I-A^\circ)_{ii}^{1/2}}{(P_{ii})^{1/2}})$$

vilket innebär att förbättringarna är normalfördelade med väntevärdet 0 och med standardavvikelse enligt det andra uttrycket i parentesen.

Detta kan även uttryckas i ett konfidensintervall:

$$|V_i| \leq \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma_o (I-A^\circ)_{ii}^{1/2}}{(P_{ii})^{1/2}}$$

eller

$$(4.7) \quad \frac{|V_i| (P_{ii})^{1/2}}{\sigma_o (I-A^\circ)_{ii}^{1/2}} \leq \lambda_{\alpha/2}$$

där gränsvärdet λ beror på konfidensgraden $1-\alpha$ (tabeller finns). Vid sökning av grova fel jämförs detta gränsvärde med testkvoten till vänster. Testet kräver emellertid att grundmedelfelet (σ) är känt, vilket sällan är fallet. Istället skattas detta ofta ur mätdata.

En vidareutveckling av teorin har genomförts i Pope (1976), där han använder skattningen ($\bar{\sigma}$) av grundmedelfelet i testkvoten och antar en ny fördelning för densamma, τ -fördelningen, vilken är beroende av antalet överbestämningar och antalet observationer.

Testet blir då i stället:

$$\frac{|V_i| (P_{ii})^{1/2}}{\bar{\sigma}_o (I-A^\circ)_{ii}^{1/2}} \leq \tau_\alpha(\bar{o}, n)$$

där $(1-\alpha)$ är konfidensgrad, \bar{o} är antalet överbestämningar och n antalet mätningar.

I vanliga fall sätts vikten omvänt proportionell mot kvadraten på det uppskattade apriorimedelfelet för en viss mätning, men i vårt fall kan alla tolv mätningarna inom ett stickprov anses ha samma noggrannhet. Följdaktligen kan vikten sättas till ett. Antalet mätningar inom varje

stickprov mot ett objekt är tolv, således är antalet överbestämningar elva stycken.

Beräkning av $(I-A^\circ)$ har skett på följande sätt:

$$A^T = (1 \ 1 \ 1 \dots 1 \ 1 \ 1)_{1 \times n}$$

$$A^T P A = n$$

$$(A^T P A)^{-1} A^T P = 1/n (1 \ 1 \ 1 \dots 1 \ 1 \ 1)_{1 \times n}$$

$$A^\circ = A (A^T P A)^{-1} A^T P = 1/n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Alltså gäller:

$$(I-A^\circ)_{ii} = 1 - 1/n = \frac{n-1}{n}$$

I detta fall blir således testen:

$$\frac{|v_i|}{\bar{\sigma}_0} * \left(\frac{n}{n-1}\right)^{1/2} \leq \tau_{0.05}(n-1, n)$$

Detta med 95% konfidensgrad, vilket innebär en risk på 5% att en observation utan grovt fel förkastas. Vid testet förkastades tre enstaka observationer ur olika stickprov med τ -värdet $\tau_{0.05}(11, 12) = 2.515$. Efter fortsatt test av dessa stickprov med $\tau_{0.05}(10, 11) = 2.466$ befanns alla återstående mätningar vara godkända.

För övrigt har ett helt stickprov mot objekt nr 4 förkastats på grund av felidentifiering vid en av uppställningarna.

4.3 ANALYS AV VARIANSKOMPONENTER

Efter elimination av grova fel har varianskomponenter i den nya modellen $Y = \mu + \delta_i + \epsilon_{ij}$ skattats.

Som hjälpmedel används en variansanalystabell (Enger, 1981):

Varianskälla	FRG	KVS	MKVS	E{MKVS}
Mellan st.pr.	k-1	$\sum n_i (y_{i.} - y_{..})^2$	$\frac{KVS}{FRG}$	$\sigma_\epsilon^2 + n_i * \sigma_\delta^2 = S_m^2$
Inomvarians	n-k	$\sum \sum (y_{ij} - y_{i.})^2$	$\frac{KVS}{FRG}$	$\sigma_\epsilon^2 = S_i^2$
Total	n-1	$\sum \sum (y_{ij} - y_{..})^2$		

Här motsvarar k antal stickprov mot ett visst objekt och n representerar totala antalet observationer mot detsamma.

Poolad inomvarians (S_i^2) och $\frac{S_m^2}{n_i}$ har beräknats för varje objekt.

Faktorn n_i har hela tiden satts till tolv, vilket innebär en liten approximation med tanke på att det hos tre objekt finns ett stickprov av sex som innehåller elva observationer. Detta som en följd av eliminationen av grova fel.

Vi har alltså: $\sigma_\epsilon^2 + n_i * \sigma_\delta^2 = S_m^2$ och $\sigma_\epsilon^2 = S_i^2$, vilket ger

$$\sigma_\delta^2 = \frac{S_m^2}{n_i} - \frac{S_i^2}{n_i}$$

där σ_δ^2 är lika med variansen för den faktor som varierar mellan mättillfällena och σ_ϵ^2 motsvarar variansen för en vinkelmätning. Summan av de två faktorerna blir:

$$\sigma_T^2 = \sigma_\delta^2 + \sigma_\epsilon^2 = \frac{S_m^2}{n_i} - \frac{S_i^2}{n_i} + \frac{n_i S_i^2}{n_i} = \frac{S_m^2}{n_i} + \frac{n_i - 1}{n_i} S_i^2$$

det vill säga, i detta fall:

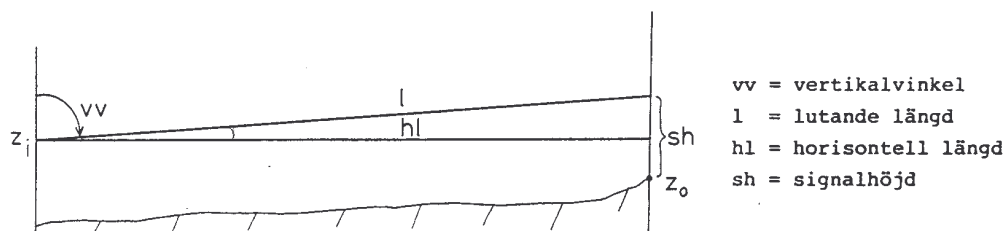
$$\sigma_T^2 = \frac{S_m^2}{12} + \frac{11}{12} S_i^2$$

5 TEORETISK-EMPIRISK VIKTSFUNKTION

5.1 TEORETISK HÄRLEDNING

För att kunna bestämma en funktion för apriorimedelfel och därmed viktsättning vid enkel trigonometrisk höjdbestämning (eller någon annan företeelse där den sökta storheten är en funktion av flera variabler), måste felfortplantningen analyseras. Om man vid "fri uppställning" vill bestämma instrumentets höjd utifrån ett känt objekt (Fig.5.1), utgår man från formeln:

$$Z_i = Z_o + sh - hl \cdot \cot(vv)$$



Figur 5.1. Enkel trigonometrisk höjdbestämning

där

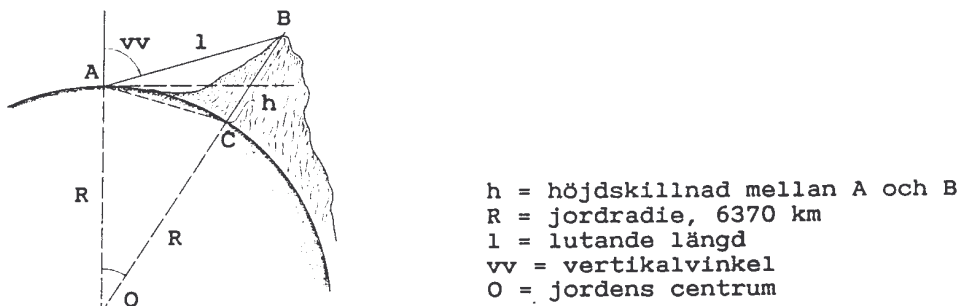
Z_i = Instrumentets absoluta höjd

Z_o = Objektets (marknivåns) höjd

Eller om man utgår från mätt lutande längd:

$$Z_i = Z_o + sh - l \cdot \cos(vv)$$

På grund av att metoden ofta används vid långa avstånd till objekt, bör man emellertid även ta hänsyn till jordkrökning och refraktion (Fig. 5.2):



Figur 5.2. Principen för trigonometrisk höjdmätning

(Ur Bjerhammar (1967), med andra beteckningar)

Höjdskillnaden mellan två punkter blir då, med beaktande av jordkrökningen (Bjerhammar, 1967):

$$h = (R^2 + l^2 + 2Rl \cos(vv))^{1/2} - R = \\ = (R + l \cos(vv)) * \left(1 + \frac{l^2 \sin^2(vv)}{(R + l \cos(vv))^2}\right)^{1/2} - R$$

Detta enligt cosinusteoremet. Efter serieutveckling av kvadratrotsfaktorn, med försummande av högre ordningens termer, erhålles följande approximativa formel:

$$h = l \cos(vv) + \frac{l^2 \sin^2(vv)}{2R}$$

där den andra termen således kan anses vara korrektionen för jordkrökning. Genom ljusets brytning i luftlager med olika brytningsindex, får vi emellertid en något krökt siktlinje. Detta är en effekt av refraktionen. Felet i höjdskillnaden med anledning av detta är motriktat felet som jordkrökningen ger upphov till. Korrektionen för felet brukar beräknas som en faktor med omvänt tecken av jordkrökningskorrektionen, vilket ger:

$$h = l \cos(vv) + (1-k) \frac{l^2 \sin^2(vv)}{2R}$$

där $k \approx 0.13$ är den terrestra refraktionskonstanten.

Alltså har vi efter beaktande av inverkan från jordkrökning och refraktion:

$$(5.1) \quad Z_i = Z_o + sh - l \cos(vv) - (1-k) \frac{l^2 \sin^2(vv)}{2R}$$

Således är Z_i en funktion av fem variabler där fel kan uppstå:

Z_o ; Fel i utgångspunkt

sh ; Fel i signalhöjdsättning

l ; Fel i mätt lutande längd

vv ; Fel i mätt vertikalvinkel

k ; Fel i bestämning av refraktionskonstant

I fortsättningen slås emellertid Z_o och sh samman till en term, $c = Z_o + sh$.

Vad vi är intresserade av är medelfelet i Z_i och för att kunna beräkna detta undersöker vi effekten av elementarfelen på detsamma. Vi utgår då från att dessa är oberoende av varandra och använder därför medelfelet's speciella fortplantningslag:

$$\sigma_F^2 = \left(\frac{\delta F}{\delta x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\delta F}{\delta y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\delta F}{\delta z}\right)^2 \sigma_z^2 + \dots$$

Tillämpas denna lag på formeln (5.1) för enkel trigonometrisk höjdbestämning får man:

$$\begin{aligned} \frac{\delta Z_i}{\delta c} &= 1 \\ \frac{\delta Z_i}{\delta l} &= -\cos(vv) - (1-k) \frac{1 \cdot \sin^2(vv)}{R} \\ \frac{\delta Z_i}{\delta vv} &= 1 \cdot \sin(vv) - (1-k) \frac{1}{2R} \cdot \sin(2vv) \\ \frac{\delta Z_i}{\delta k} &= \frac{1^2 \cdot \sin^2(vv)}{2R} \end{aligned}$$

Alltså:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{Z_i}^2 &= \sigma_c^2 + \left\{ \cos(vv) + (1-k) \frac{1 \cdot \sin^2(vv)}{R} \right\}^2 \sigma_l^2 + \\ &+ \left\{ 1 \cdot \sin(vv) - (1-k) \frac{1}{2R} \cdot \sin(2vv) \right\}^2 \sigma_{vv}^2 + \\ &+ \frac{1^4 \cdot \sin^4(vv)}{4R^2} \sigma_k^2 \end{aligned}$$

Vi utvecklar detta uttryck för att se vilka termer det består av:

$$\begin{aligned} \sigma_{Z_i}^2 &= \sigma_c^2 + \frac{1^4 \cdot \sin^4(vv)}{4R^2} \sigma_k^2 + \\ &+ \left\{ \cos^2(vv) + 2(1-k) \frac{1}{R} \cdot \sin^2(vv) \cdot \cos(vv) + \right. \\ &+ \left. (1-k)^2 \frac{1^2}{R^2} \cdot \sin^4(vv) \right\} \sigma_l^2 + \\ &+ \left\{ 1^2 \cdot \sin^2(vv) - (1-k) \frac{1^3}{R} \cdot \sin(vv) \cdot \sin(2vv) + \right. \\ &+ \left. (1-k)^2 \frac{1^4}{4R^2} \cdot \sin^2(2vv) \right\} \sigma_{vv}^2 \end{aligned}$$

Om man sätter in några realistiska värden på längder och vinklar ser man att den dominerande termen, utöver de två första, är:

$$1^2 \cdot \sin^2(vv) \cdot \sigma_{vv}^2$$

men att även

$$\cos^2(vv) \cdot \sigma_l^2$$

står för en icke försumbar del av den totala variansen vid branta sikter.

Formeln (5.2), för det teoretiska medelfelet vid enkel trigonometrisk höjdmätning, kan tydligen med god approximation förenklas till:

$$(5.3) \sigma_{z_i}^2 = \sigma_c^2 + \cos^2(vv)\sigma_1^2 + l^2 \sin^2(vv)\sigma_{vv}^2 + \frac{l^4 \sin^4(vv)}{4R^2} \sigma_k^2$$

5.2 EMPIRISKA RESULTAT

Syftet med detta försök är, som tidigare påpekats, endast att skatta parametrar i en viktsfunktion vid trigonometrisk höjdbestämning. Denna viktsfunktion är då avsedd att användas inom samhällsmätningen. Således bör vissa approximationer och begränsningar kunna godtas. Man kan då förutsätta att de mätta zenitdistanserna ligger relativt nära 100 gon. Med dessa begränsningar kan (5.3) förenklas ytterligare. Vi får:

$$\sigma_{Z_i}^2 = \sigma_c^2 + \sigma_{vv}^2 * l^2 + \frac{\sigma_k^2}{4R^2} * l^4$$

eller

$$(5.4) \quad \sigma_{Z_i}^2 = K1 + K2 * l^2 + K3 * l^4 \quad \text{där}$$

$K1 = \sigma_c^2 =$ Varians i mätt signalhöjd, utgångspunkt och eventuell instrumenthöjd

$K2 = \sigma_{vv}^2 =$ Varians i mätt vertikalvinkel = poolad inomvarians i detta fall

$K3 =$ Varians som olika faktorer i atmosfären ger upphov till (refraktion)

Uppgiften är således att bestämma dessa tre konstanter. För övrigt kan noteras att apriorimedelfelet endast beror av avståndet till objektet.

5.2.1 Bestämning av K1

Den sammanlagda effekten av de två varianskomponenterna har beräknats för samtliga objekt:

$$\sigma_T^2 = \sigma_\delta^2 + \sigma_\epsilon^2 = \frac{(S_m^2 + 11S_i^2)}{12}$$

Dessa värden har enheten gon².

Därefter har värdena, uttryckta som medelfel, omvandlats till längdmått (mm) och plottats som en funktion av sikt-längderna (bilaga 1).

Enligt den grafiska lösningen, kan medelfelet vid sikt-längden "noll" approximeras till ca 0.43mm. Detta ger den konstanta termen:

$$K1 \approx 0.43^2 \text{ mm}^2 \approx 0.2 \text{ mm}^2$$

Denna term visar hur vi lyckats med bestämningen av instrumenthöjden och är ointressant vid utformandet av den slutgiltiga viktsfunktionen.

5.2.2 Bestämning av K2

Konstanten K2 motsvarar den poolade inomvariansen för alla mätdata och representerar därmed skattningen av variansen vid en mätning:

$$S_i^2 = 3.7615 \cdot 10^{-7} \text{ gon}^2$$

vilket ger:

$$S_i = 6.1 \cdot 10^{-4} \text{ gon}$$

eller, omvandlat till enheten mm/100m :

$$S_i = 0.9582 \text{ mm/100m}$$

Således, efter kvadrering:

$$K2 \approx 0.9 \text{ (mm/100m)}^2$$

5.2.3 Bestämning av K3

Den tredje konstanten är besvärligare att skatta. Anledningen till detta är att variansen hos en variansskattning beror på skattningens storlek. Således uppkommer problem vid exempelvis en MK-skattning av densamma. Vid en sådan bör då "variansobservationerna" på de objekt som ligger avlägset viktas ned, eftersom variansen i sig är större. Detta förfarande skulle vara onödigt komplicerat. Istället har vi bestämt K3 genom en "Trial-and-Error-metod". Detta har skett genom att en kurva anpassats så bra som möjligt till skattade totalvarianser, samt tidigare beräknade värden på K1 och K2. Med "så bra som möjligt" menas att relativa och absoluta avvikelser från aktuella data minimerats. På detta sätt har vi kommit fram till värdet:

$$K3 \approx 0.15 \text{ mm}^2 / (100\text{m})^4$$

Ur mätdata har således variansen i en mätt höjdskillnad uppskattats till:

$$(5.5) \quad \sigma_{Z_i}^2 = (0.2) + 0.9 \cdot 1^2 + 0.15 \cdot 1^4 \text{ mm}^2$$

där 1 anges i 100-tal meter.

Denna funktion gäller vid vertikalvinkelmätning i en helsats, eftersom detta betraktats som en observation i våra mätdata, men kan även användas vid mätning i flera helsatser (eg. $0.9/n$). Detta beroende på att K2-termen "drunknar" i antingen konstanttermen (vid korta avstånd) eller i refraktionstermen (vid långa avstånd).

5.3 SLUTGILTIG VIKTSFUNKTION

Vid funktionens utformande har ingen hänsyn tagits till medelfel i utgångspunkter och i liten grad till medelfel i instrument- och signalhöjd. Anledningen till detta är att dessa faktorer ej ingått i försöket. Om funktionsvärdena ska bli realistiska bör även dessa felkällor beaktas.

5.3.1 Medelfel i instrument- och signalhöjder

Erfarenhetsmässigt kan totala effekten av medelfelen i instrument- och signalhöjder uppskattas till ca 2-6mm. Uttryckt som varians kan :

$$(5.6) \quad \sigma_{i/s}^2 = 16 \text{ mm}^2$$

sågas vara ett realistiskt genomsnitt. Detta värde fungerar tillfredsställande vid såväl fri uppställning, då endast signalhöjd mäts, som i de fall då även instrumenthöjden mäts.

5.3.2 Medelfel i utgångspunkter

För att kunna uppskatta medelfelen i utgångspunkterna krävs ett antagande om någon mätklass/ordning ur TFA. Till att börja med antar vi mätklass II, ordning 1. För denna mätklass anger TFA ett maximalt mätmedelfel på:

$$7 \text{ mm/km}^{1/2}$$

(vid avvägning). Härur kan ett uttryck för medelfelet (variansen) i en utjämnad höjd approximativt härledas (inga detaljer redovisas). Uttrycket som sådant är dock olämpligt i detta sammanhang. Dels ger det medelfelet "noll" vid extremt korta avstånd, vilket är orealistiskt, dels är termen (uttryckt i varians) direkt proportionell mot längden.

Med anledning av detta har en andragsgradsfunktion använts istället. Vi får då följande uttryck för variansen i utjämnad given höjd:

$$(5.7) \quad \sigma_{up}^2 = 3 + 0.15 * l^2 \text{ mm}^2$$

där l anges i hundratal meter. Ur (5.6) och (5.7) erhålls alltså:

$$(5.8) \quad \sigma_c^2 = 19 + 0.15 * l^2 \text{ mm}^2$$

5.3.3 Totalt apriorimedelfel

Efter sammanläggning av formlerna (5.5), (5.6) och (5.7) fås:

$$\sigma_{Z_i}^2 = 19 + 1.05 * 1^2 + 0.15 * 1^4 \text{ mm}^2$$

eller med avrundade siffror:

$$(5.9) \quad \sigma_{Z_i}^2 = 20 + 1^2 + 0.15 * 1^4 \text{ mm}^2 \quad (1 \text{ i } 100 \text{ m})$$

Denna formel gäller således vid TFA II:1.

Vid TFA III:1 gäller ett maximalt mätmedelfel på:

$$15 \text{ mm/km}^{1/2}$$

Kvadraten på detta ger en varians som är ca fyra gånger större än felgränsen i TFA II:1, således:

$$\sigma_{\text{up}}^2 = 4 * (3 + 0.15 * 1^2) = 12 + 0.6 * 1^2 \text{ mm}^2$$

Detta ger:

$$\sigma_{Z_i}^2 = 28 + 1.5 * 1^2 + 0.15 * 1^4 \text{ mm}^2$$

eller avrundat:

$$(5.10) \quad \sigma_{Z_i}^2 = 30 + 1.5 * 1^2 + 0.15 * 1^4 \text{ mm}^2 \quad (1 \text{ i } 100 \text{ m})$$

Vid TFA IV:1 gäller ett maximalt mätmedelfel på:

$$30 \text{ mm/km}^{1/2}$$

Kvadraten på detta ger en varians som är ca sexton gånger större än felgränsen i TFA II:1, vilket ger:

$$\sigma_{\text{up}}^2 = 48 + 2.4 * 1^2 \text{ mm}^2$$

Således:

$$\sigma_{Z_i}^2 = 64 + 3.3 * 1^2 + 0.15 * 1^4 \text{ mm}^2$$

eller efter avrundning:

$$(5.11) \quad \sigma_{Z_i}^2 = 65 + 3.5 * 1^2 + 0.15 * 1^4 \text{ mm}^2 \quad (1 \text{ i } 100 \text{ m})$$

De punkttyper som vi associerat till i de olika mätklasserna är:

TFA II:1; avvägd punkt.

TFA III:1; trigonometriskt höjdbestämd väggpunkt.

TFA IV:1; rör i mark (polygonpunkt).

För att approximativt gälla för samtliga fall, bör formeln se ut ungefär så här (medeltal av 5.9, 5.10 och 5.11):

$$(5.12) \quad \sigma_{Z_i}^2 = 35 + 2 \cdot l^2 + 0.15 \cdot l^4 \text{ mm}^2$$

där l alltså anges i hundratal meter. Denna formel används när en uppdelning på punkttyper är opraktisk.

5.3.4 Summering

Slutligen har vi alltså, på teoretisk och empirisk väg, kommit fram till nedanstående formel för viktsberäkning vid enkel trigonometrisk höjdmätning:

$$(5.13) \quad P_i = 1 / (K_1 + K_2 \cdot l^2 + K_3 \cdot l^4)$$

med följande värden på parametrarna:

<u>mot punkttyp</u>	<u>K1</u>	<u>K2</u>
avvägd punkt	20	1.0
väggpunkt	30	1.5
polygonpunkt i mark	65	3.5
i genomsnitt	35	2.0

K_3 är 0.15 i samtliga fall; l anges i hundratal meter.

Viktsfunktionerna visar dels att det vid korta avstånd är punktnoggrannheten och noggrannheten i signal- och eventuell instrumenthöjd som är avgörande, dels att enkel trigonometrisk höjdmätning, på grund av refraktionen, blir ganska dålig på långa avstånd (ca 4 cm medelfel på 1 km). Vidare kan man se att hur många helsatser man mäter i stort sett saknar betydelse.

I fallet med branta vertikalkvinklar används istället formeln (se 5.3):

$$(5.14) \quad P_i = 1 / (K_1 + \cos^2(vv) \cdot \sigma_1^2 + K_2 \cdot \sin^2(vv) \cdot l^2 + K_3 \cdot \sin^4(vv) \cdot l^4)$$

6 LITTERATURFÖRTECKNING

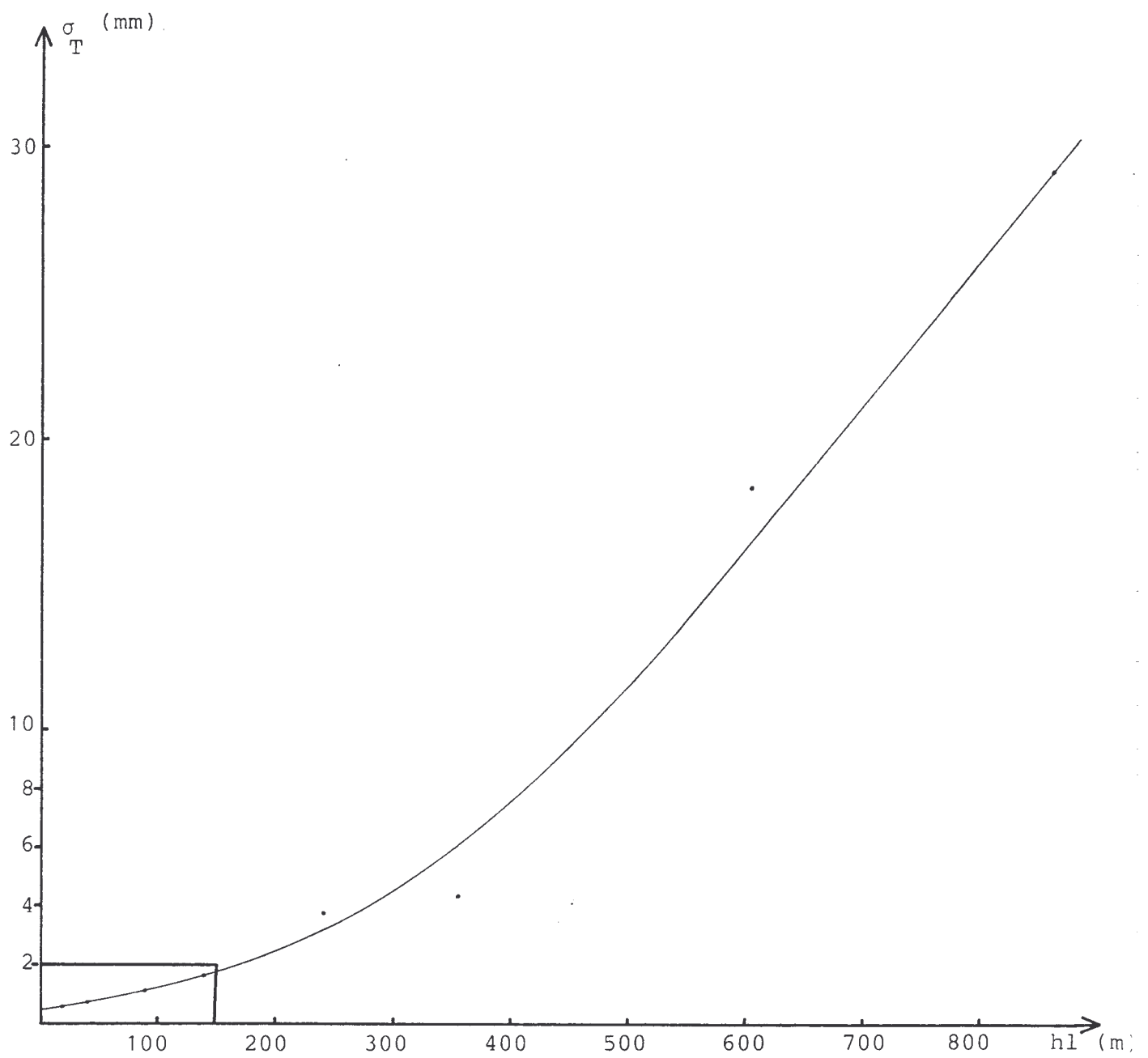
- ADOLFSSON, B. (1980) Planering och beräkning av geodetiska stornät i plan. Datasektionen 1980-03, TD 126. Statens Vägverk, Borlänge.
- BAARDA, W. (1968) A testing procedure for use in geodetic networks. Netherlands Geodetic Commission, Vol. 5, No 1.
- BJERHAMMAR, A. (1967) Geodesi. Almqvist & Wiksell/Gebers Förlag AB, Stockholm.
- BJERHAMMAR, A. (1973) Theory of errors and generalized matrix inverses. Elsevier, Amsterdam.
- ENGER, J. (1981) Linjära modeller (inklusive regressions- och variansanalysmodeller). Stockholm.
- GUSTAFSSON, A. (1986) Vägmarkerat stornät i Alingsås. LMV-rapport (1986:19). Gävle.
- JOHANSSON, K-G. (1986) Vägmarkerade stornät - sammanställning av erfarenheter. LMV-rapport (1985:6). Gävle.
- HELLMAN, B. (1985) KÄLLSTRÖM, B. OLDENMARK, T. PERSSON, C-G. VIRKING, J. (1985) Vägmarkerade stornät - sammanställning av erfarenheter. LMV-rapport (1985:6). Gävle.
- JOHANSSON, S-I. (1987) Gamla och nya felkällor. Sid.60-62, VÄGPROJEKTERING 87, 9-11 september 1987, Dalamässan. Statens Vägverk, Borlänge.
- LITHÉN, T. (1986) En ny metod för beräkning och kontroll av fri instrumentuppställning. Svensk Lantmäteri-tidskrift (1986:3) och LMV-rapport (1986:15). Gävle.
- OLOFSSON, T. (1983) PERSSON, C-G. Kontroll av grova fel vid fri uppställning. Särtryck ur Svensk Lantmäteri-tidskrift (1983:5)

- PERSSON, C-G. (1981) On the estimation of variance components in linear models and related problems, with special reference to geodetic applications. KTH, Stockholm.
- PERSSON, C-G. (1982) Utjämnig, analys och optimering av triangelnät. Föredrag vid 9:e nordiska geodetmötet i Gävle 1982-09-13--17.
- PERSSON, C-G. (1985) SUKK - ett programsystem för grafisk presentation av precision och tillförlitlighet i geodetiska nät. Svensk Lantmäteriitidskrift (1985:6).
- PERSSON, C-G. (1986) Modern stommätning. LMV-rapport (1986:18). Gävle.
- POPE, A.J. (1976) The statistics of residuals and the detection of outliers. NOAA Technical Report, NOS 65, NGS 1. Rockville.

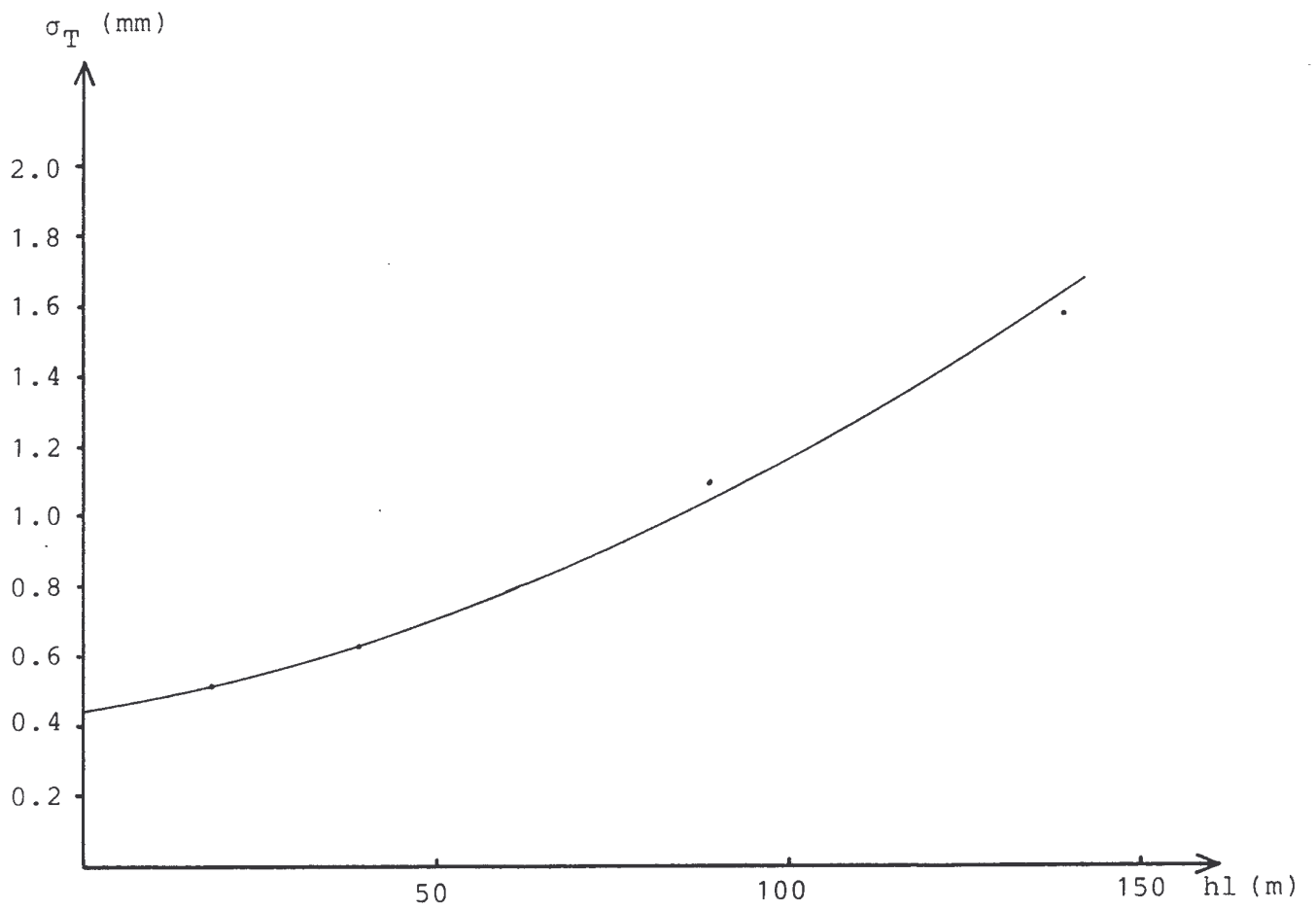
7 BILAGOR

- 1 Totalt medelfel i höjdbestämning som funktion av horisontellt avstånd till objekt.
- 2 Profil av mätbasens konfiguration. Siktlinjer inlagda.
- 3 Konfiguration vid höjdbestämning av mätinstrument.
- 4 Skiss av försöksbasen.

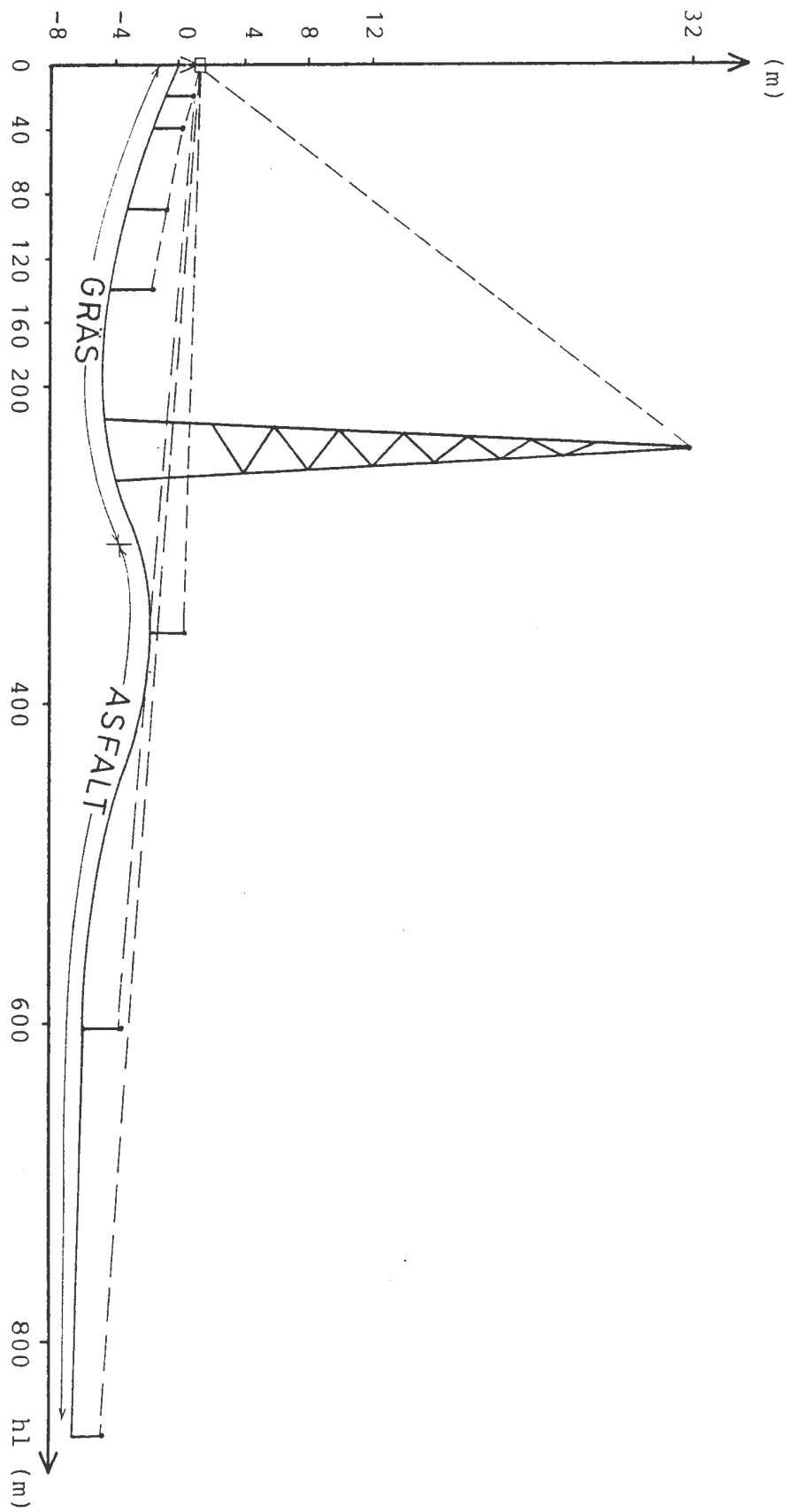
Totalt medelfel i höjdbestämning som funktion
av horisontellt avstånd till objekt



Uppförstorad detalj av grafens infällda del



Profil av mätbasens konfiguration
Siktlinjer inlagda

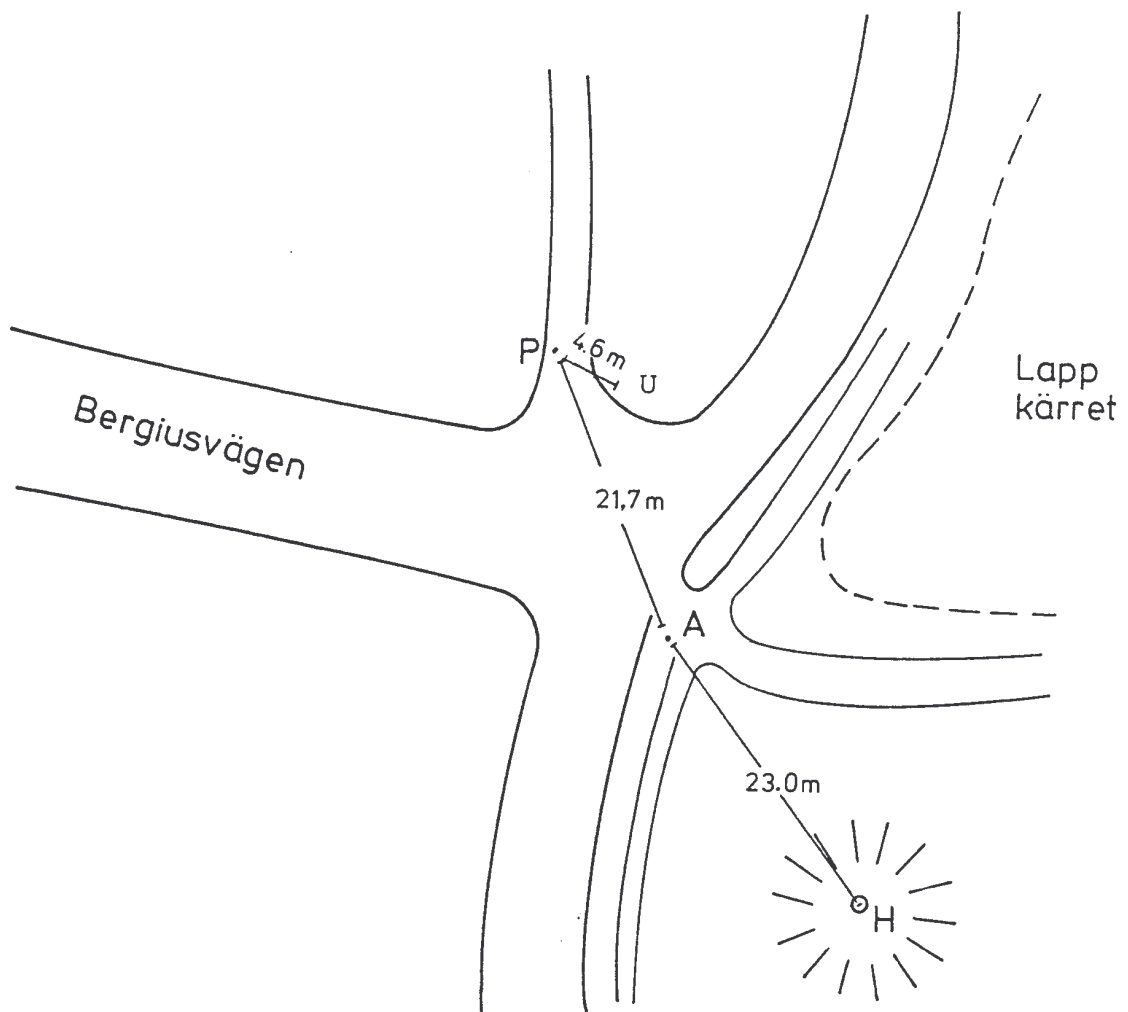


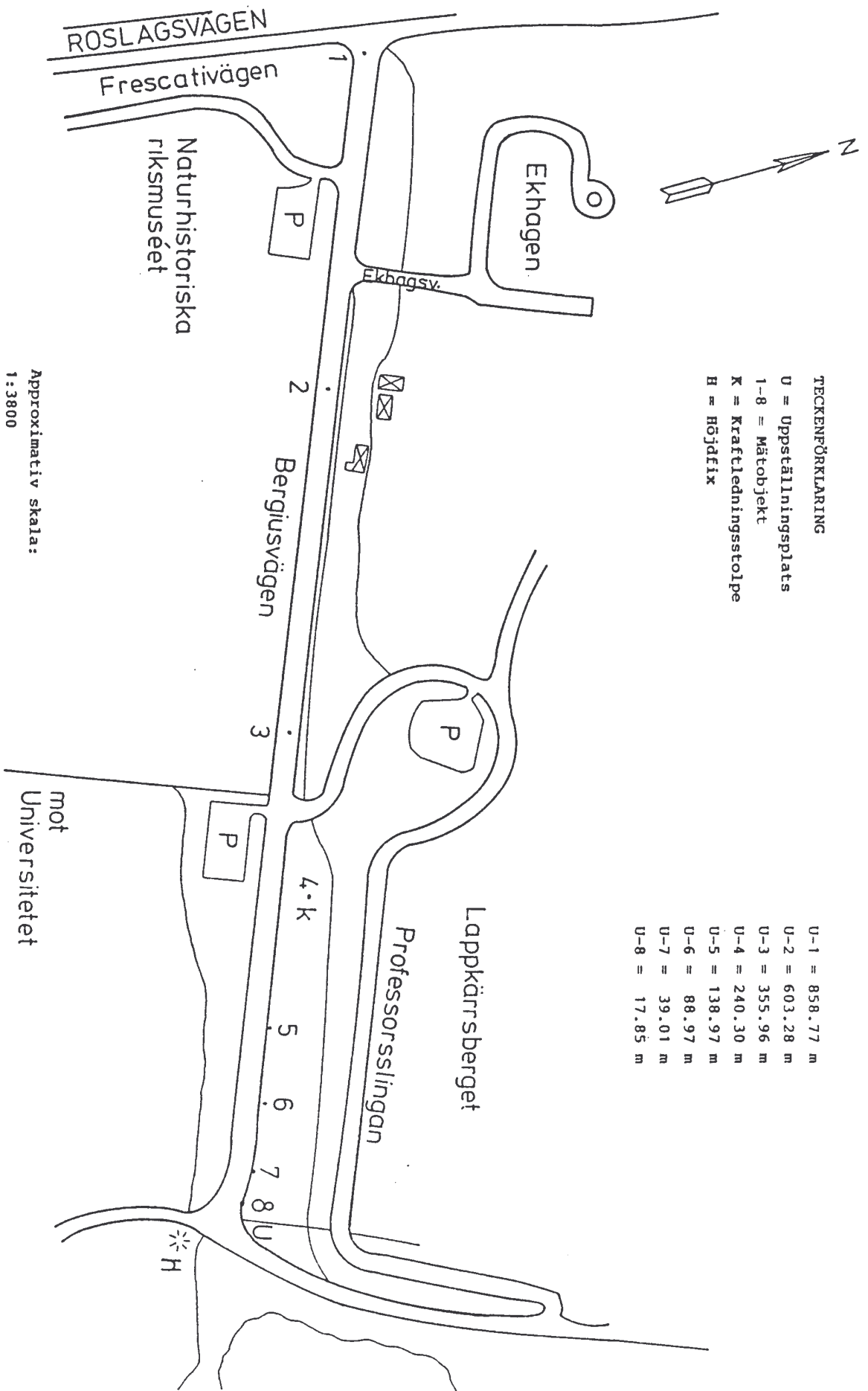
TECKENFÖRKLARING

- A = Avvägningsinstrument
- H = Höjdfix
- P = Padda
- U = Uppställningsplats

Konfiguration vid höjdbestämning
av mätinstrument

Approximativ skala:
1:500





TECKENFÖRKLARING
 U = Uppställningsplats
 1-8 = Mätobjekt
 K = Kraftledningsstolpe
 H = Höjdfix

- U-1 = 858.77 m
- U-2 = 603.28 m
- U-3 = 355.96 m
- U-4 = 240.30 m
- U-5 = 138.97 m
- U-6 = 88.97 m
- U-7 = 39.01 m
- U-8 = 17.85 m

Approximativ skala:
 1:3800

mot
 Universitetet